

Regiones de multiestabilidad en el espacio de parámetros del sistema de Mackey-Glass

Juan Pedro Tarigo

Introducción

Sistemas con delay

- El retardo temporal es un fenómeno común en diversas áreas de la ciencia
- Sistemas de dimensión infinita

$$\text{DDE} \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x, x_\tau, t) \longrightarrow x(t) \text{ depende de } x(\theta) \text{ con } \theta \in [t - \tau, t] \\ x_\tau = x(t - \tau) \end{cases}$$

Introducción

Modelo de Mackey-Glass

- Propuesto para modelar enfermedades hematopoyéticas y respiratorias

$$\frac{dP}{dt} = \underbrace{\beta_0}_{\text{Tasa de producción}} \frac{\theta^n P_\tau}{\theta^n + P_\tau^n} - \underbrace{\gamma P}_{\text{Tasa de decaimiento}}$$

Delay

$$\xrightarrow[\substack{t' = \gamma t \\ \Gamma = \gamma \tau}]{x = \frac{P}{\theta}}$$

$$\frac{dx}{dt'} = \alpha \frac{x_\Gamma}{1 + x_\Gamma^n} - x$$

Ecuación adimensionada

Implementación discreta

$$\underbrace{dt' = \frac{\Gamma}{N} \qquad x_{j+1} = x_j e^{-\frac{\Gamma}{N}} + \left(1 - e^{-\frac{\Gamma}{N}}\right) \frac{\alpha x_{j-N+1}}{1 + x_{j-N+1}^n}}_{\text{discrete implementation}}$$

$$\frac{dx}{dt'} = \frac{x_{j+1} - x_j}{dt'} = x_j \left(e^{-\frac{\Gamma}{N}} - 1\right) + \left(1 - e^{-\frac{\Gamma}{N}}\right) \frac{\alpha x_{j-N+1}}{1 + x_{j-N+1}^n}$$



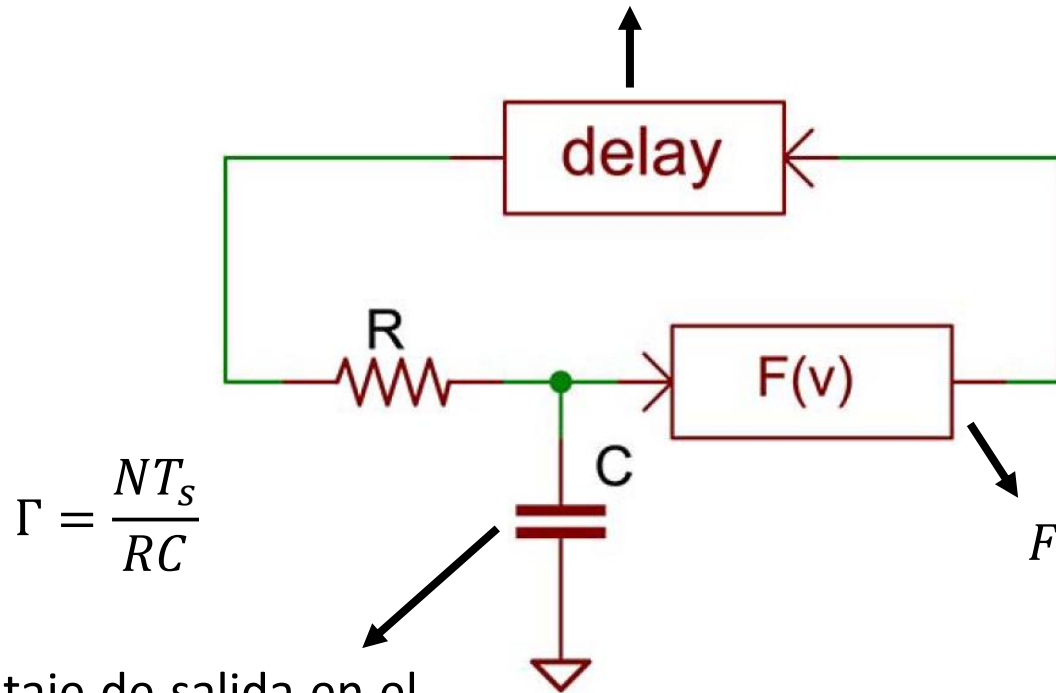
$$\frac{dx}{dt'} = \alpha \frac{x_{\Gamma}}{1 + x_{\Gamma}^n} - x$$

$$n = 4 \quad N = 1194$$

Circuito

BBD

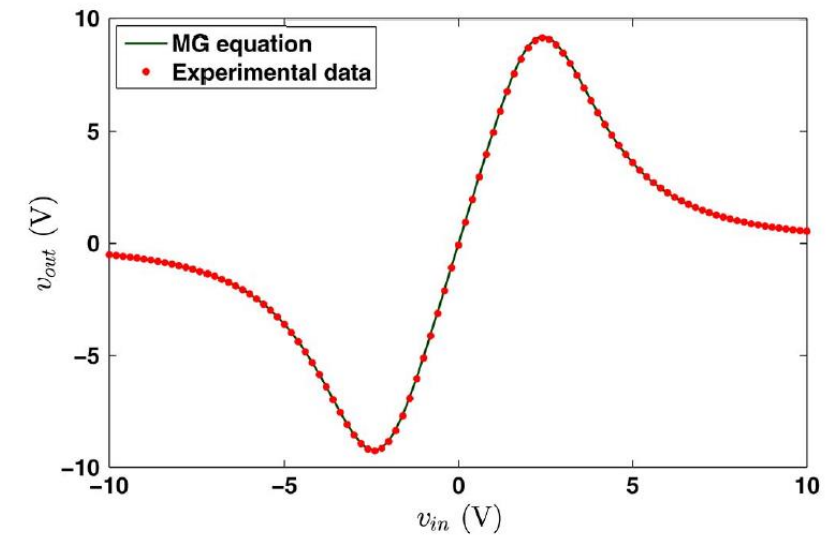
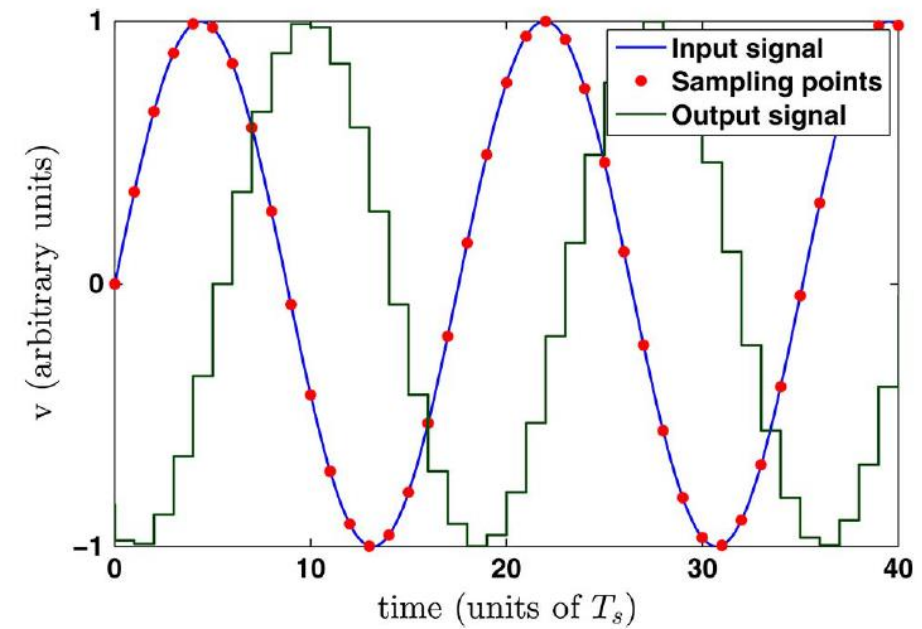
Produce una salida igual que la señal de entrada pero retrasada un tiempo NT_s



$$\Gamma = \frac{NT_s}{RC}$$

El voltaje de salida en el capacitor da la ecuación de Mackey-Glass

$$F(v) = c_1 \frac{v}{v^4 + c_2}$$

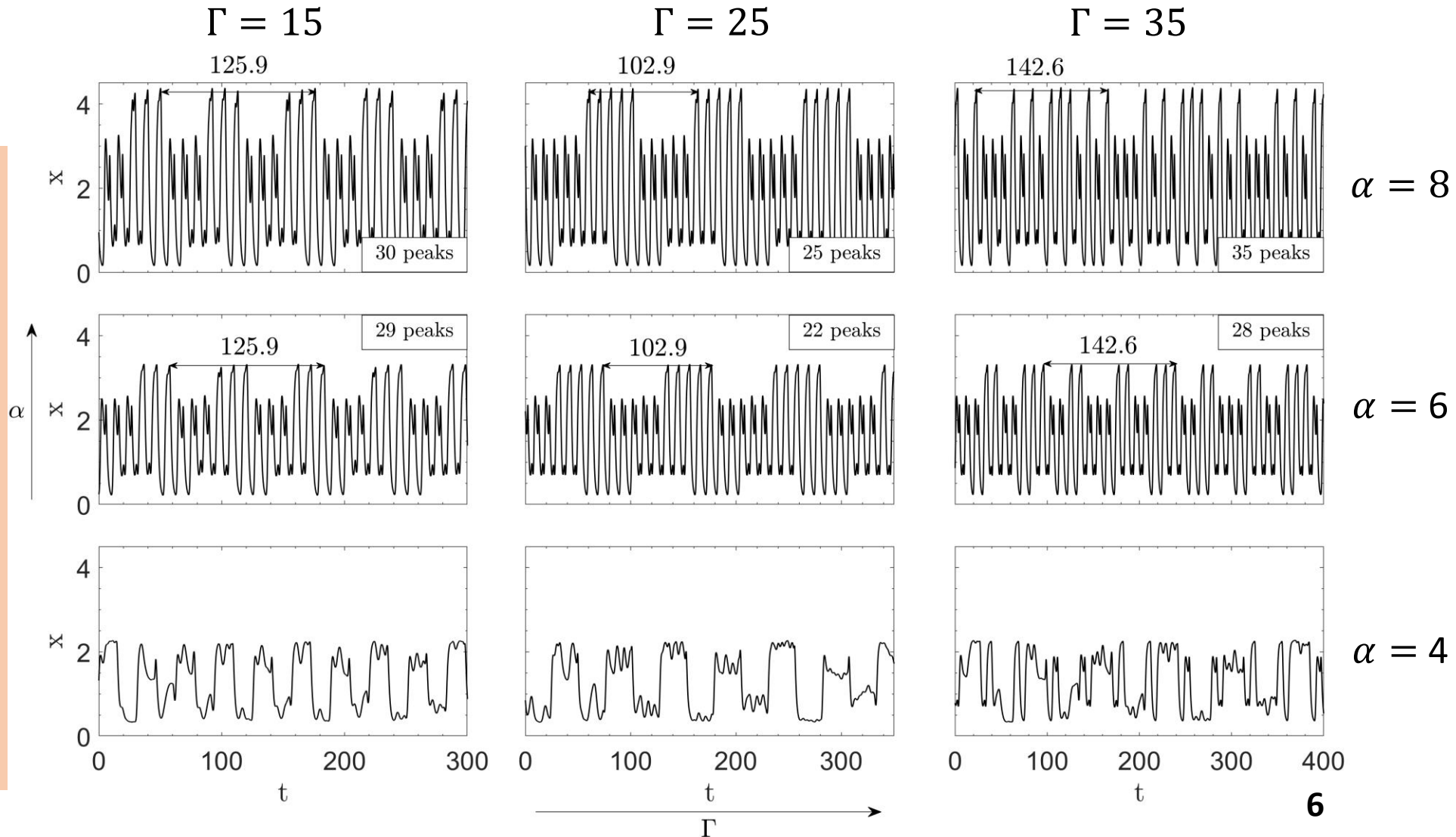


Series temporales

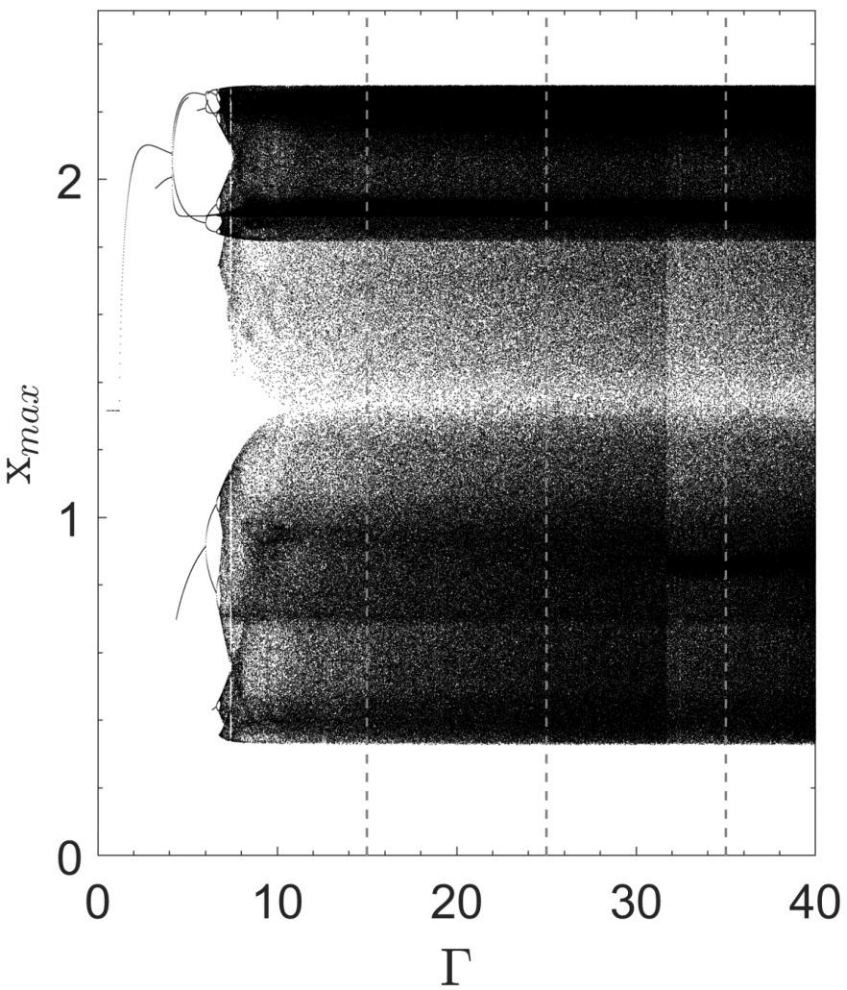
Transitorio de $5000\ \Gamma$

$$x_{in}(t) = 1 \ \forall t \in (-\Gamma, 0)$$

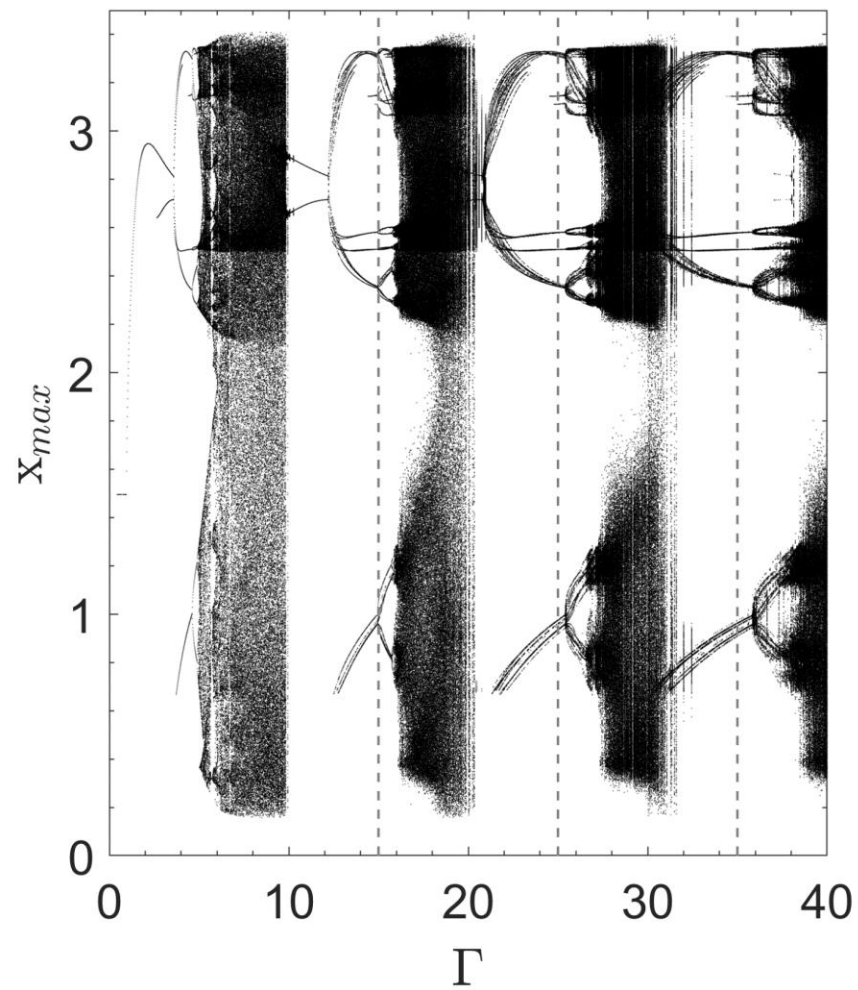
- Series caóticas para $\alpha = 4$
- El periodo se mantiene al variar α pero el numero de picos no.
- Las series parecen mantener estructura en las columnas.



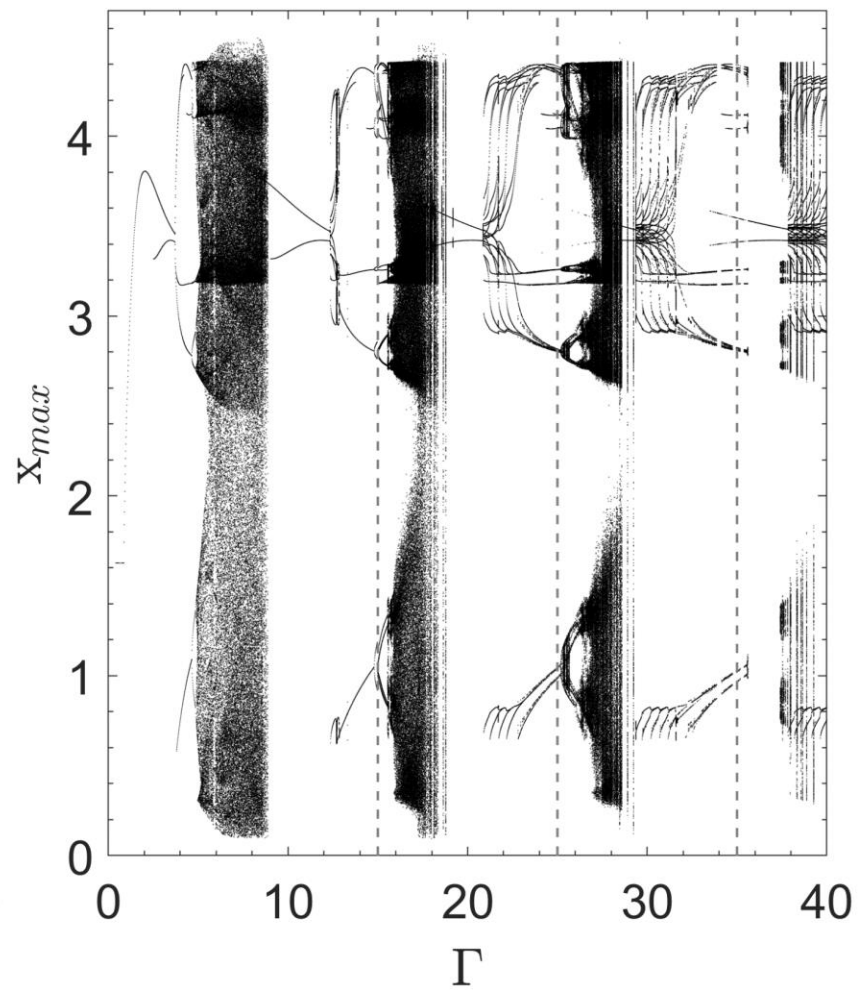
Diagramas de bifurcación



$\alpha = 4$



$\alpha = 6$

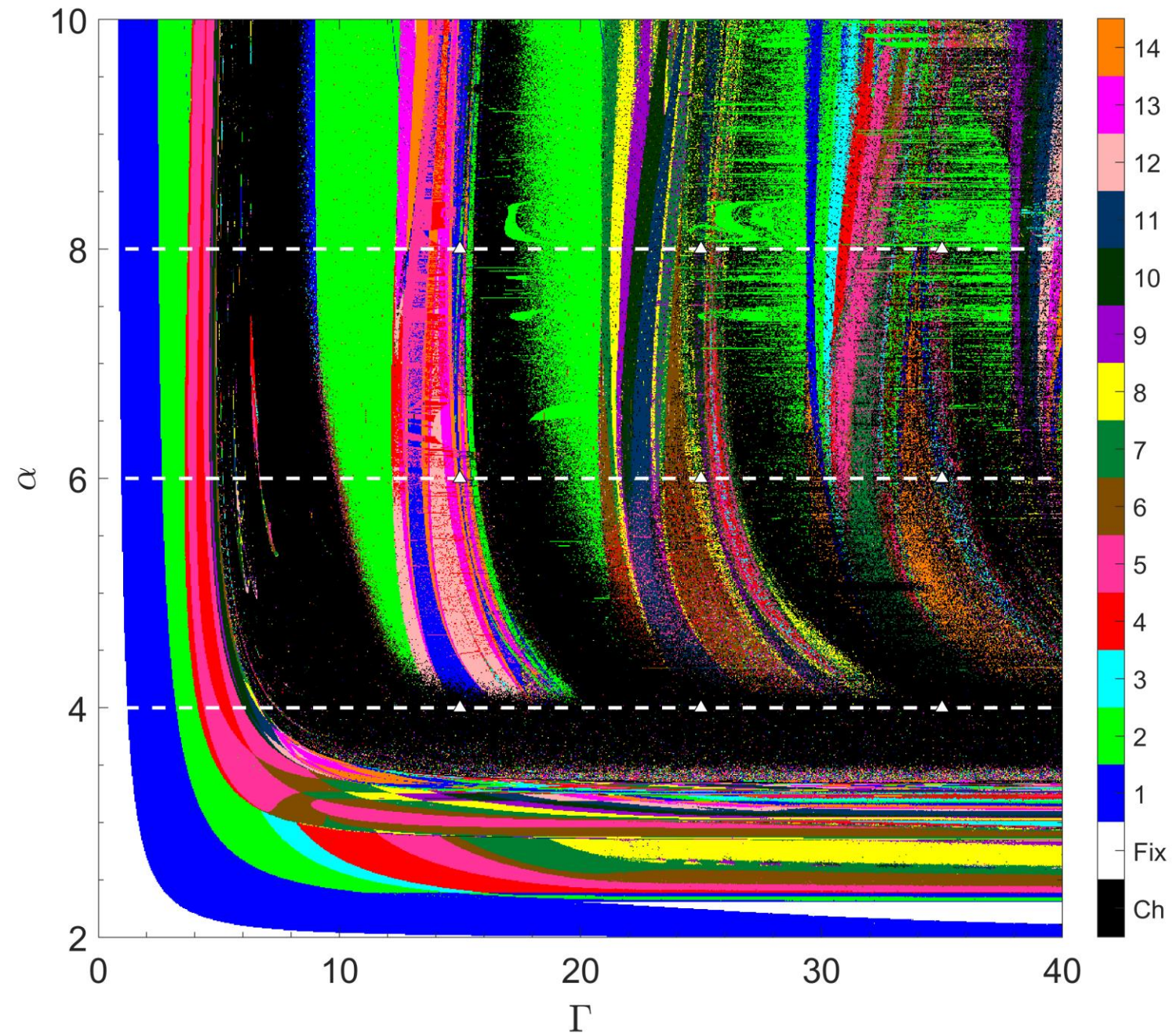


$\alpha = 8$

Espacio de parametros

Transitorio de 1000 Γ

$$x_{in}(t) = 1 \quad \forall t \in (-\Gamma, 0)$$

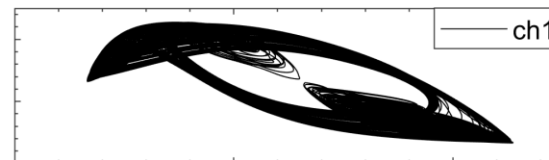
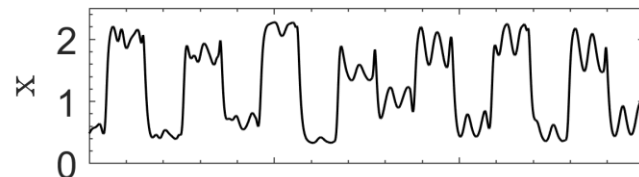
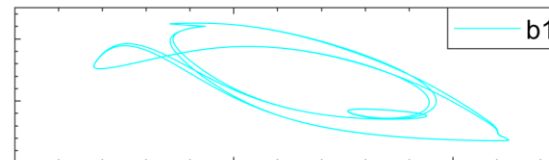
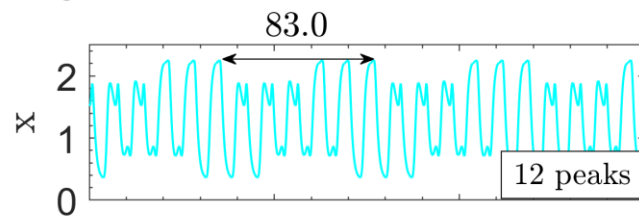
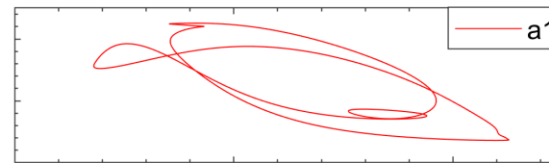
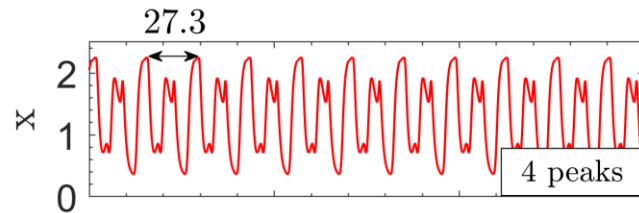


Multiestabilidad

- Coexistencia de soluciones al variar las condiciones iniciales
- Infinitas funciones posibles como condiciones iniciales
- ¿Qué ocurre en el espacio de parámetros al variar las condiciones iniciales?

$$\alpha = 4$$

$$\Gamma = 18$$

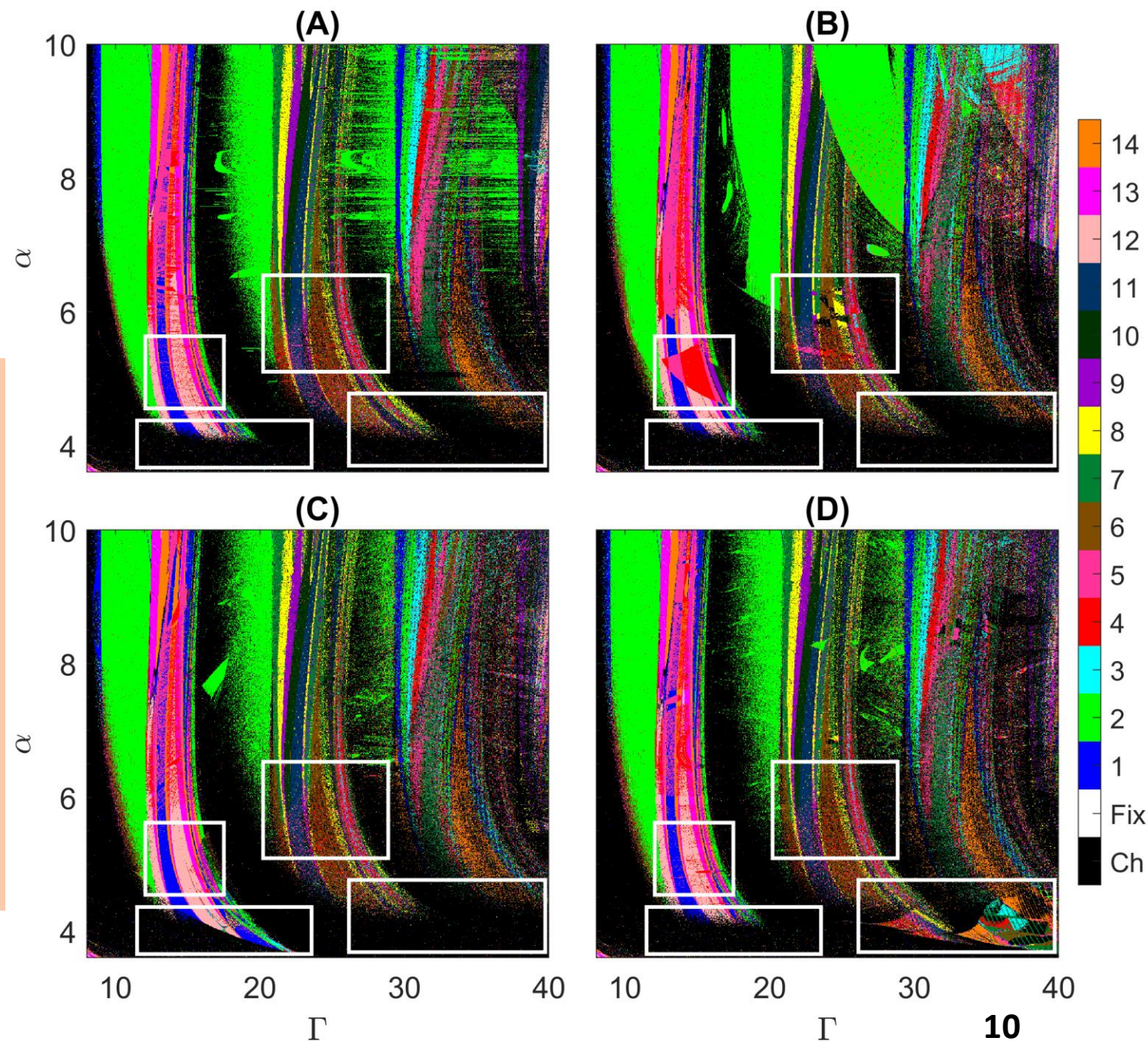


Multiestabilidad

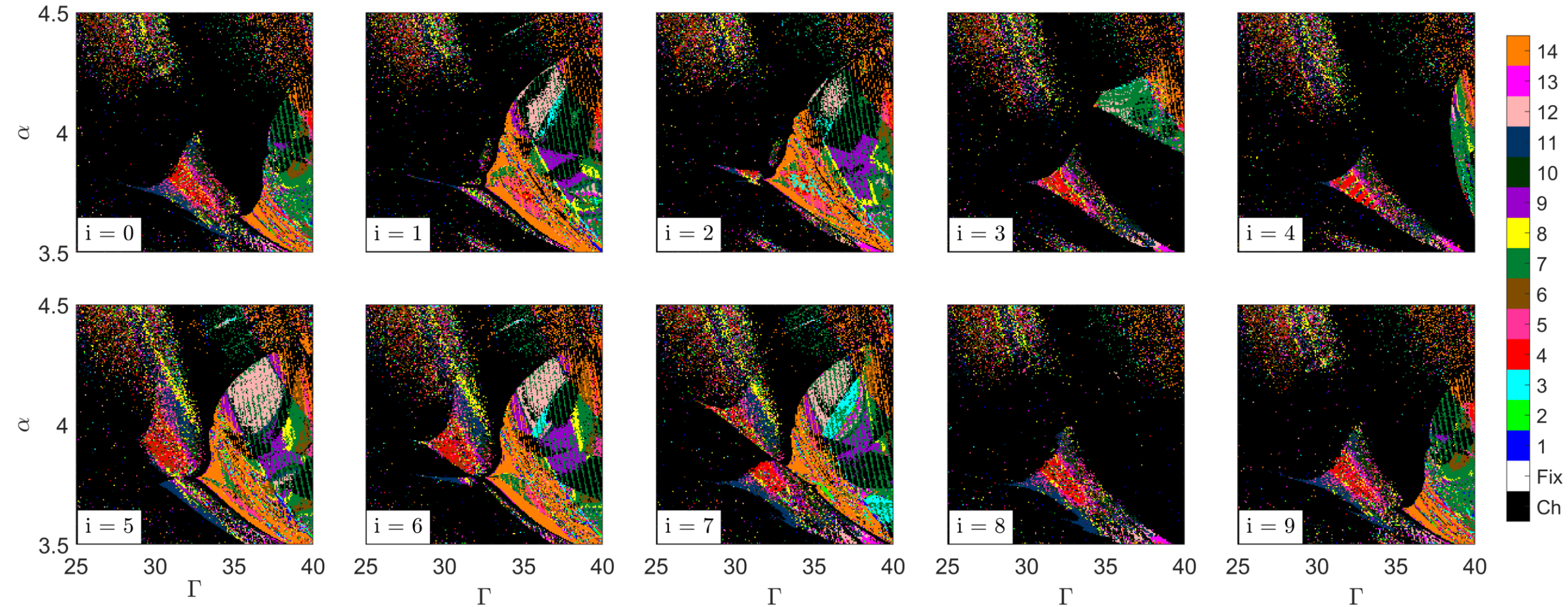
Espacio de parámetros

- **(A)** $x_{in}(t) = 1$
- **(B)** $x_{in}(t) = 0.7 \frac{t}{\Gamma} + 0.3$
- **(C)** $x_{in}(t) = \frac{1}{4} \sin\left(\frac{7\pi t}{\Gamma}\right) \sin\left(\frac{7\pi t}{2\Gamma}\right) + 0.3$
- **(D)** $x_{in}(t) = \frac{1}{40} \sin\left(\frac{7\pi t}{\Gamma}\right) \left[\sin\left(\frac{7\pi t}{2\Gamma}\right) + 4 \right] + 0.33$

Transitorio de 1000Γ



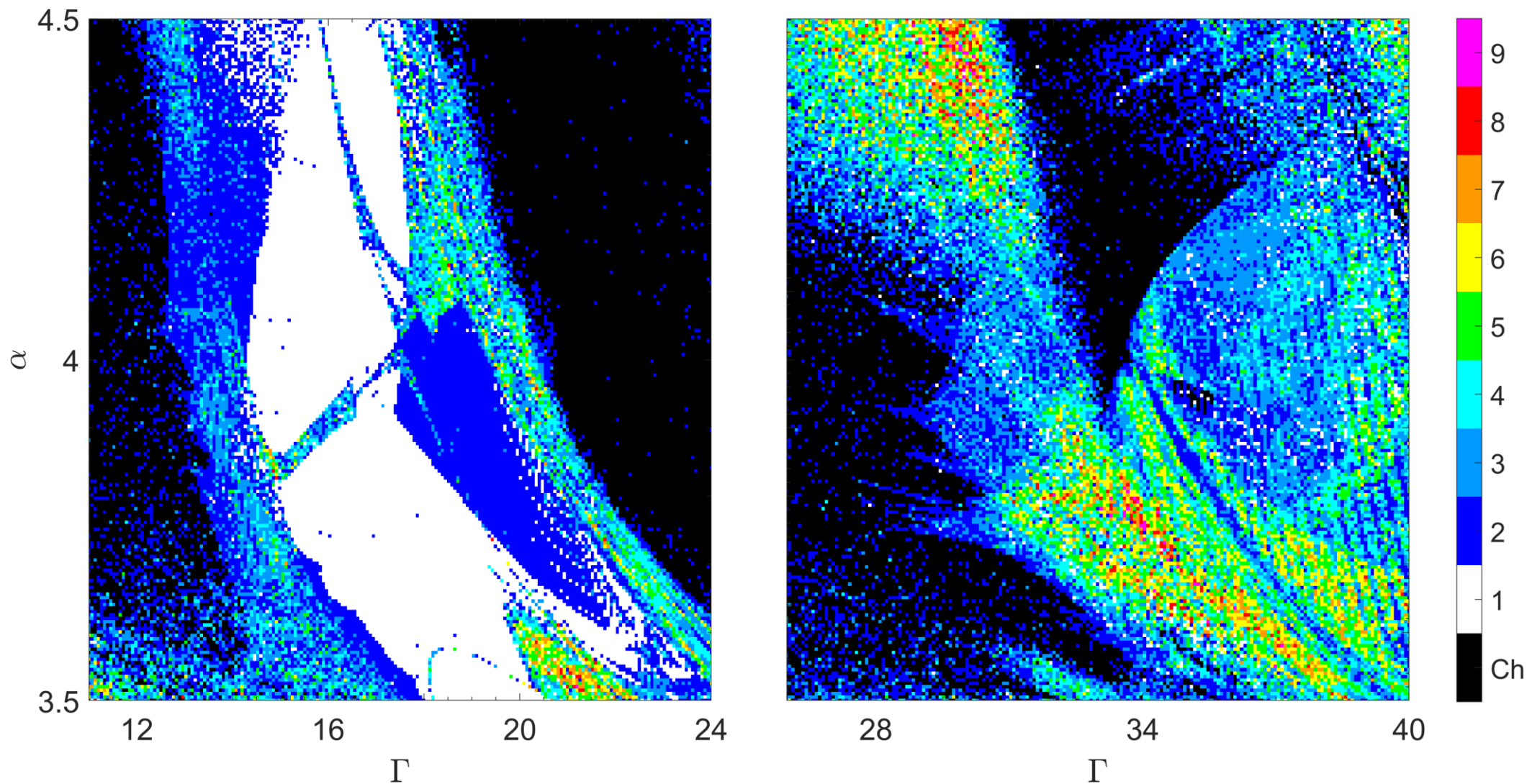
Variaciones del espacio de parametros



- $$x_{in}(t) = \frac{1}{40} \sin\left(\frac{7\pi t}{\Gamma} + \frac{4\pi i}{10}\right) \left[\sin\left(\frac{7\pi t}{2\Gamma} + \frac{2\pi i}{10}\right) + 4 \right] + 0.35$$

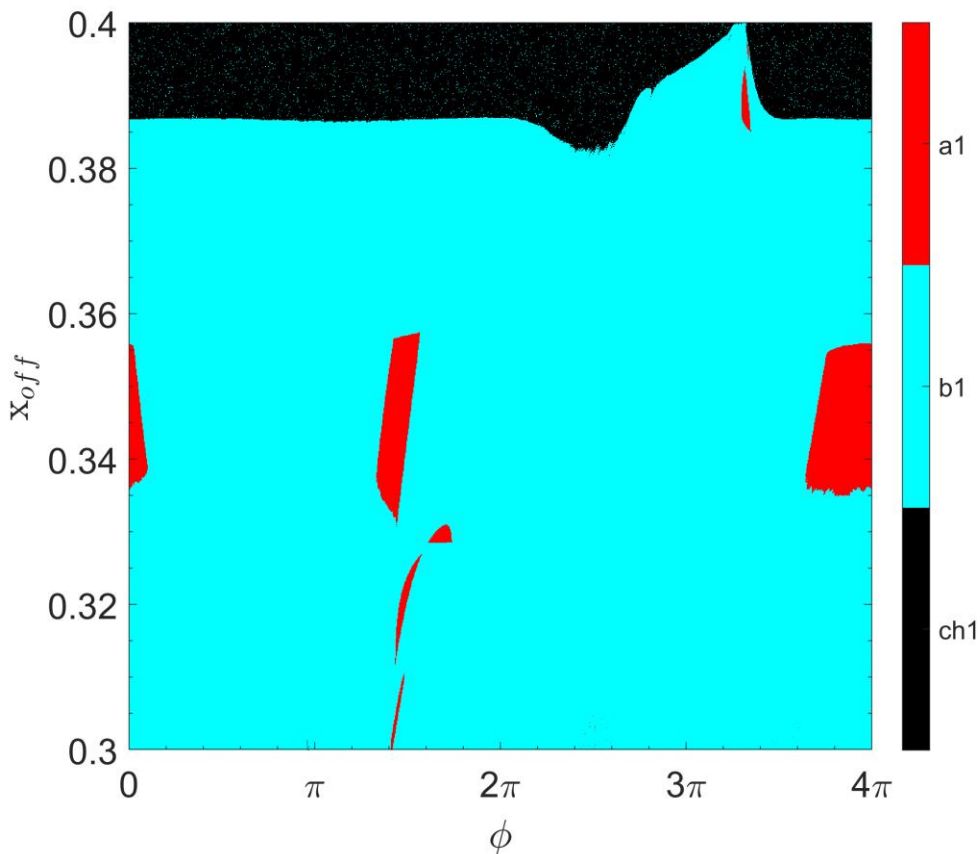
Transitorio de 1000 Γ

Numero de soluciones diferentes

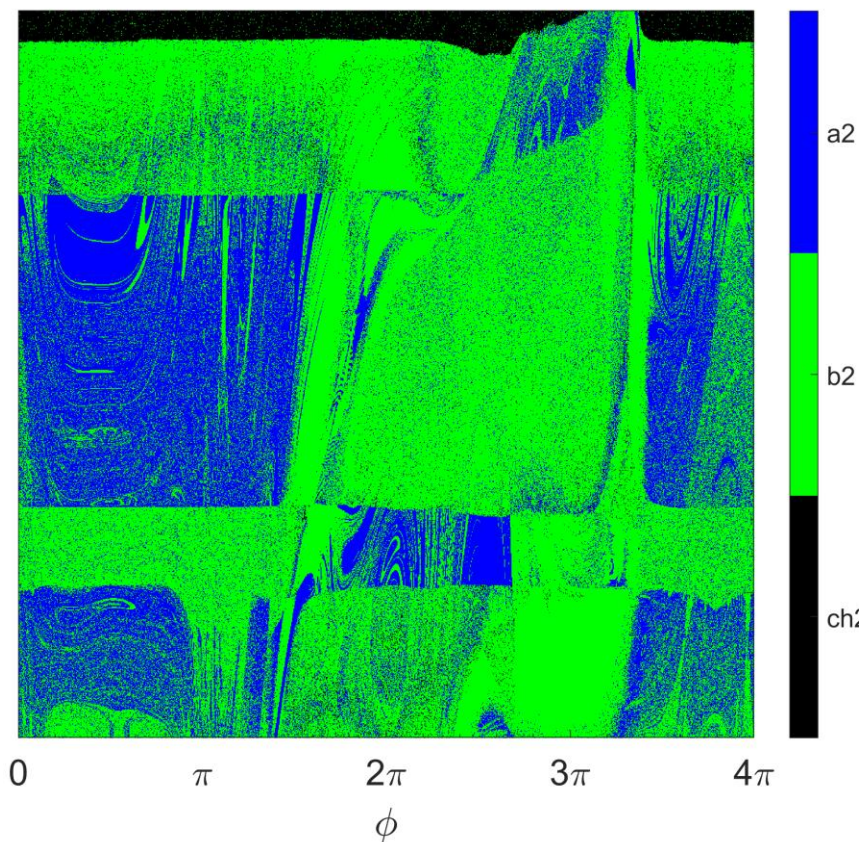


Multiestabilidad

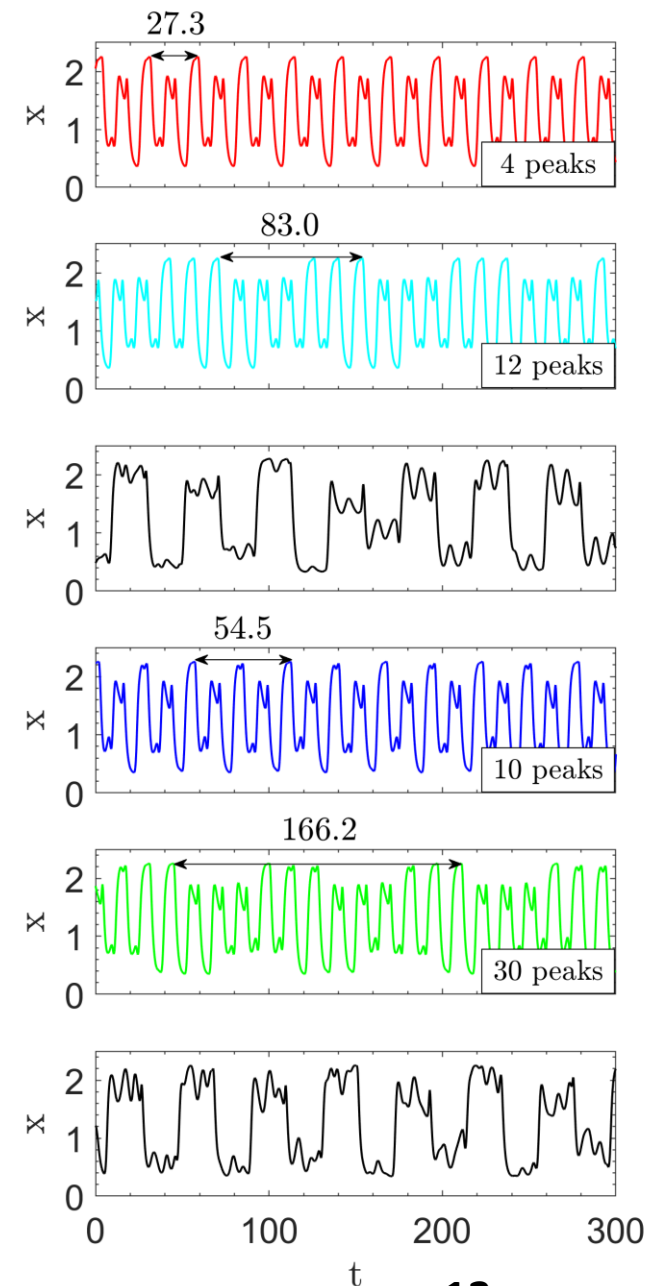
$\alpha = 4$ $\Gamma = 18$



$\alpha = 4$ $\Gamma = 20$



$$x_{in}(t) = \frac{1}{4} \sin\left(\frac{7\pi t}{\Gamma} + \phi\right) \sin\left(\frac{7\pi t}{2\Gamma} + \frac{\phi}{2}\right) + x_{off}$$



Conclusiones

- Mostramos la riqueza del sistema de Mackey-Glass al variar los parámetros α y Γ
- Observamos multiestabilidad en un amplio rango de valores en el espacio de parámetros
- La distribución de soluciones coexistentes no es homogénea en el espacio de parámetros
- Tomamos distintas familias de funciones como condiciones iniciales para hacer un análisis cualitativo del impacto de la multiestabilidad en el sistema

¡Gracias!