

Análisis de la histéresis en mapas logísticos acoplados experimentalmente

Caracé Gutiérrez

Grupo de Física No Lineal.
Instituto de Física, Facultad de Ciencias, UdelaR.

Junio de 2019

Introducción

- Mapa logístico → Ejemplo paradigmático de sistema dinámico *simple* con rica dinámica
- Estudio de mapas acoplados → permite identificar otros cambios cualitativos en la dinámica colectiva, como las bifurcaciones y la **histéresis** (diferente conjunto de atracción cuando se aumenta un parámetro de control que cuando se reduce)
- **¿Cómo depende la histéresis de la configuración del acoplamiento?**

Observation of bifurcations and hysteresis in experimentally coupled logistic maps

CARACÉ GUTIÉRREZ¹, CECILIA CABEZA¹ and NICOLÁS RUBIDO^{1,2,3,*}

¹ Universidad de la República, Instituto de Física de Facultad de Ciencias, Iguá 4225, Montevideo, Uruguay.

² University of Aberdeen, Aberdeen Biomedical Imaging Centre, AB25 2ZD Aberdeen, United Kingdom.

³ University of Aberdeen, Institute for Complex Systems and Mathematical Biology, AB24 3UE Aberdeen, United Kingdom.

*Corresponding author. E-mail: nrubido@fisica.edu.uy

Modelo

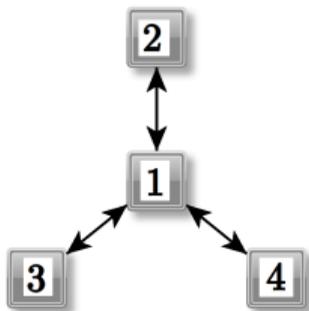
Ecuación de evolución para mapas logísticos acoplados difusivamente.

$$x_{n+1}^{(i)} = (1 - \varepsilon) f(r_i, x_n^{(i)}) + \varepsilon \sum_{j=1}^N \frac{A_{ij}}{d_i} f(r_j, x_n^{(j)})$$

Modelo

Ecuación de evolución para mapas logísticos acoplados difusivamente.

$$x_{n+1}^{(i)} = (1 - \varepsilon) f(r_i, x_n^{(i)}) + \varepsilon \sum_{j=1}^N \frac{A_{ij}}{d_i} f(r_j, x_n^{(j)})$$



$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Modelo

Ecuación de evolución para mapas logísticos acoplados difusivamente.

$$x_{n+1}^{(i)} = (1 - \varepsilon) f(r_i, x_n^{(i)}) + \varepsilon \sum_{j=1}^N \frac{A_{ij}}{d_i} f(r_j, x_n^{(j)})$$

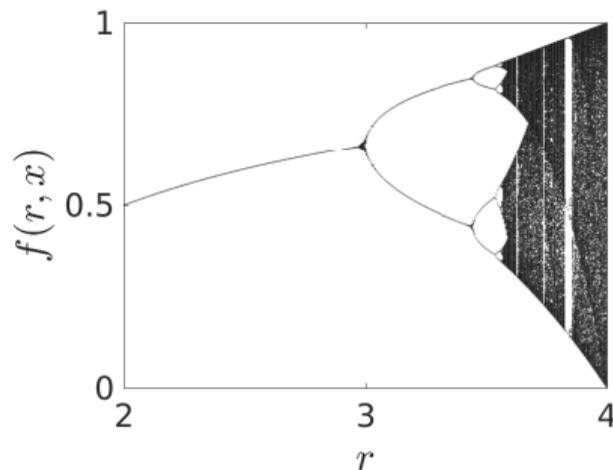
Mapa logístico

$$f(r, x_n) = rx_n(1 - x_n)$$

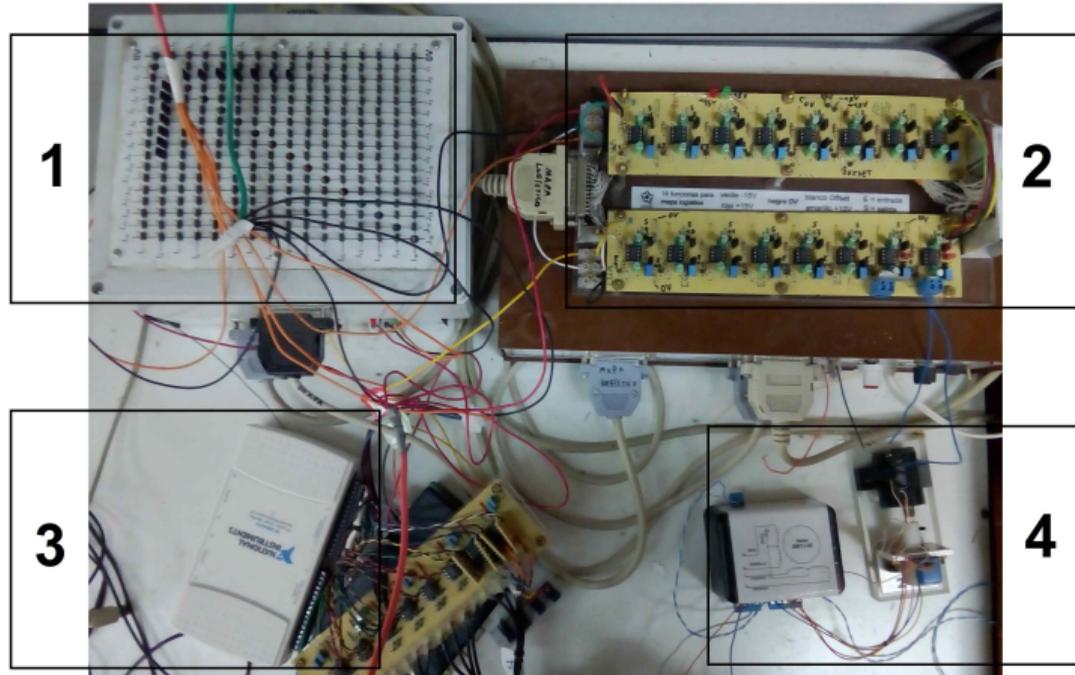
$r \rightarrow$ parámetro del mapa logístico

$\varepsilon \rightarrow$ intensidad de acoplamiento

[May, 1976]

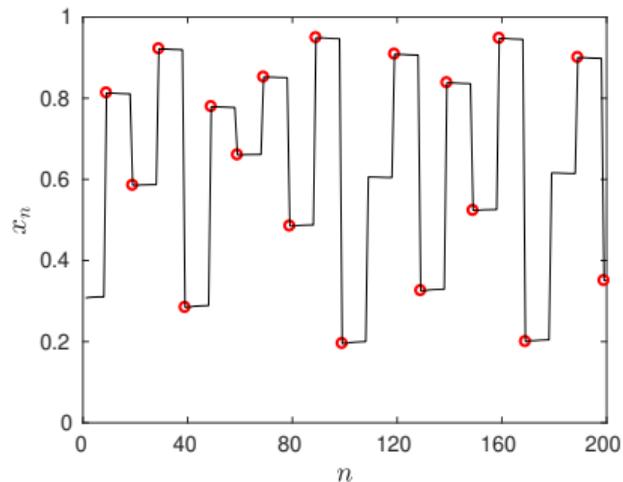


Montaje experimental



Montaje experimental. 1- Matriz de acoplamiento, 2- Mapas logísticos, 3- Sistema de adquisición, 4- Control del parámetro r .

Mapas y diagramas de bifurcaciones



Mapa $x_n = f(n)$ (círculos) a partir de señal experimental (trazo continuo).

[Feigenbaum, 1978]

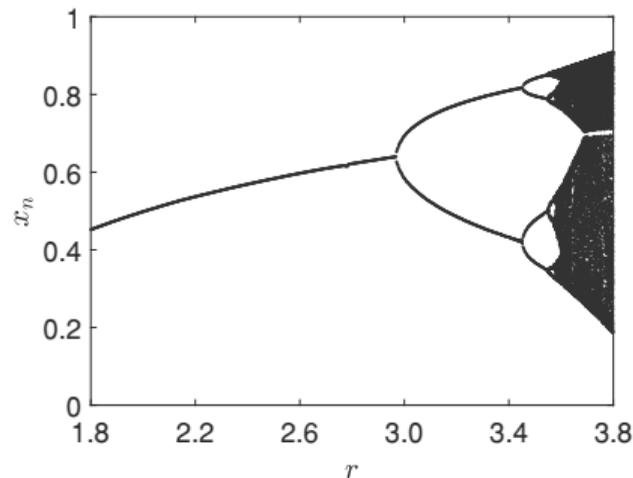


Diagrama de bifurcaciones $x_n = f(r)$ experimental.

Discrepancia $< 8\%$ de $\delta_{teo} = 4,6692\dots$

Dos ML acoplados. Observación de histéresis al variar ε

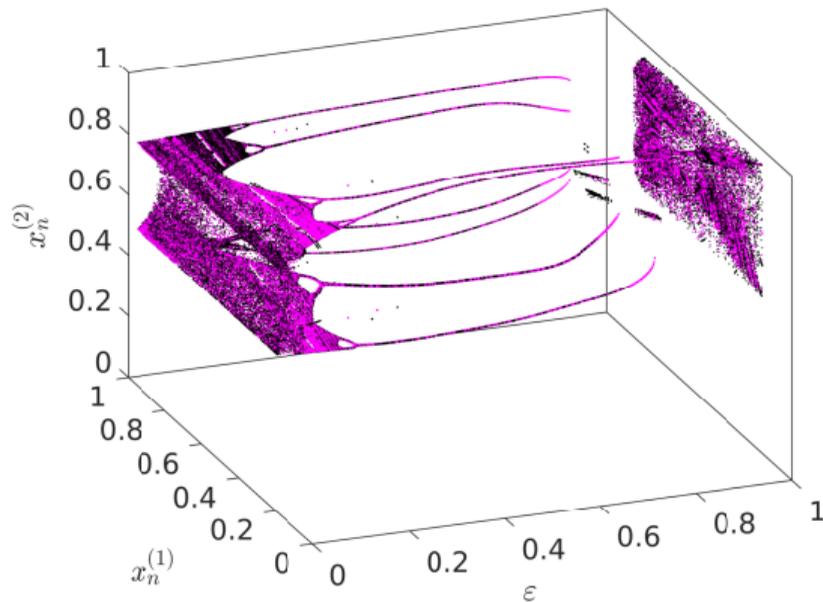
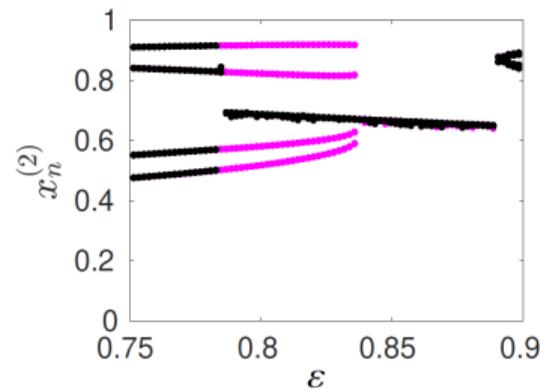
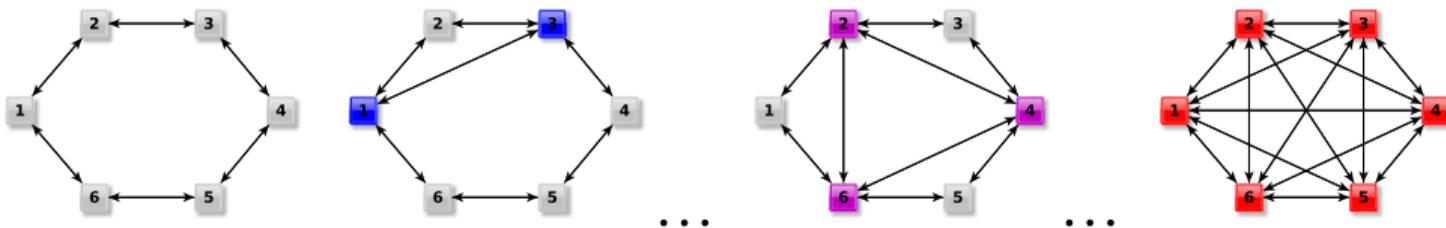


Diagrama de bifurcaciones obtenido experimentalmente al incrementar (magenta) y decrementar (negro) la intensidad del acople (ε) entre dos mapas logísticos, $r_1 \approx 3,80$ y $r_2 \approx 3,20$

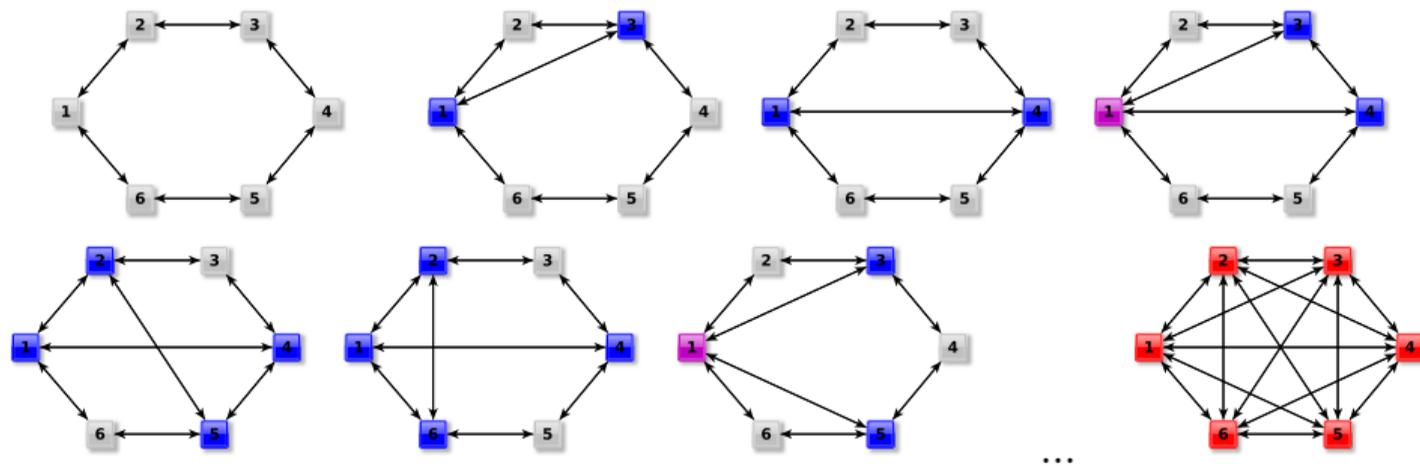


Proyección $x_n^{(2)} - \varepsilon$ en el intervalo $0,75 \leq \varepsilon \leq 0,9$

¿Cómo varía la histéresis para diferentes configuraciones?



52 Configuraciones de 6 nodos



6 mapas logísticos cuasi idénticos con: $r_i = 3,80 \pm 0,03$

Valores efectivos inferidos de la respuesta dinámica: $r_1 = 3,7364$, $r_2 = 3,7537$,
 $r_3 = 3,7609$, $r_4 = 3,7446$, $r_5 = 3,7298$, y $r_6 = 3,7300$ ($dr_i = 3 \times 10^{-4}$)

Diagrama de bifurcaciones para un nodo de un anillo al variar ε

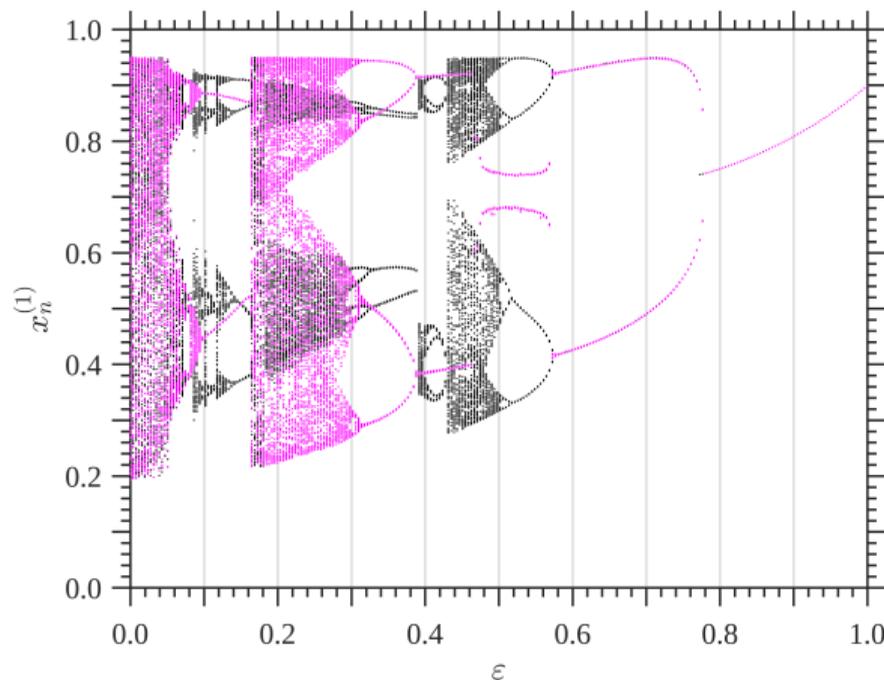


Figura 1: Diagrama de bifurcaciones experimental de 1 mapa logístico en un anillo de 6 nodos ($\Delta\varepsilon = 1/256$).

En general se observa:

- Al incrementar ε , el sistema exhibe un régimen aperiódico (dinámica aislada caótica) hasta $\varepsilon \approx 0,05$
- Cascadas de duplicación de período (inversa).
- Disminuye sucesivamente el período, pasando por regiones casi sincrónicas, hasta un punto fijo que surge en $\varepsilon \approx 0,8$

Parámetro de orden: $\overline{\sigma^2}$

Varianza entre pares (i, j)

$$\sigma_{ij}^2 = \frac{1}{T} \sum_{n=1}^T \left(x_n^{(i)} - x_n^{(j)} \right)^2$$

Varianza media del sistema

$$\overline{\sigma^2} = \frac{2}{N(N-1)} \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \sigma_{ij}^2,$$

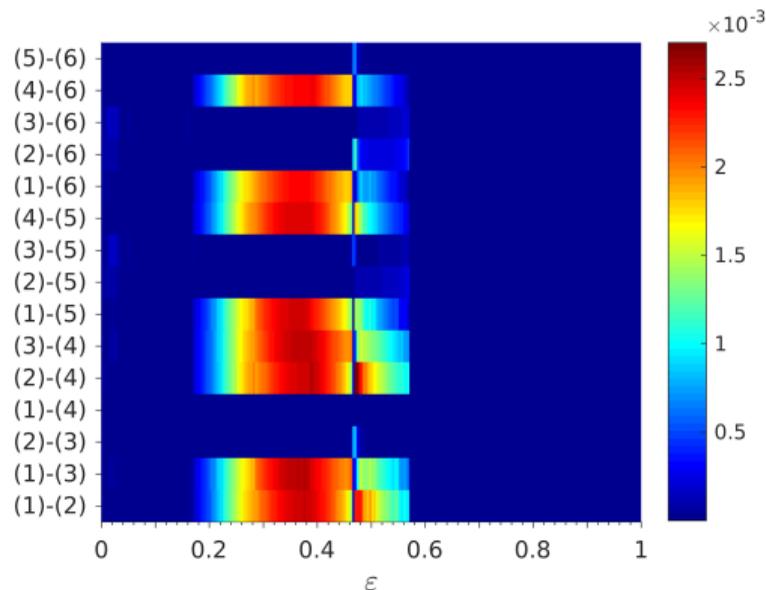


Figura 2: Varianza entre pares, σ_{ij}^2 , para 6 mapas logísticos en configuración anillo a medida que se aumenta ε .

Casos

Agrupamos los resultados de histéresis de acuerdo con las similitudes que exhibe el parámetro de orden ($\overline{\sigma^2}$) para las diferentes configuraciones:

- 1 Comportamiento multiestable similar al anillo
- 2 Comportamiento multiestable similar a la configuración completa
- 3 Histéresis para acoplamientos débiles → diferentes casos
- 4 Histéresis para acoplamientos fuertes

1-Comportamiento multiestable similar al anillo

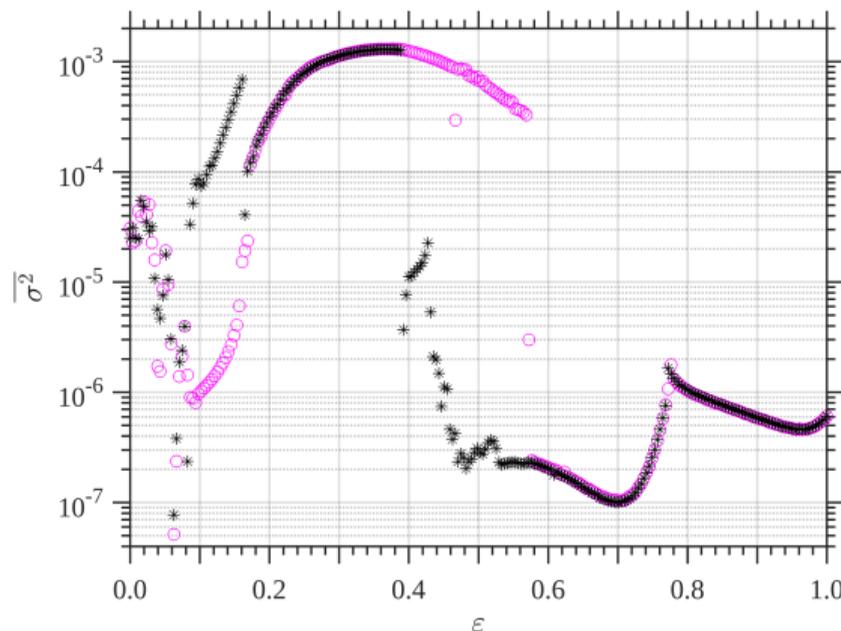
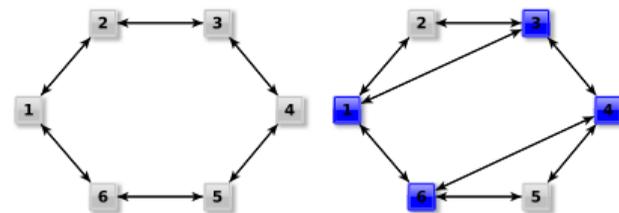


Figura 3: Histéresis en términos de $\overline{\sigma^2}$ para 6 mapas en configuración anillo. ε aumenta (magenta) de 0 a 1, y posteriormente disminuye (negro) de 1 a 0.



Configuraciones

- Caso de *mayor* histéresis
- Región multiestable entre $0,08 \lesssim \varepsilon \lesssim 0,17$ y $0,4 \lesssim \varepsilon \lesssim 0,6$
- En general, cuando $\overline{\sigma^2} \simeq 0$ los mapas se aproximan a la sincronización completa

2-Comportamiento multiestable similar a la configuración completa

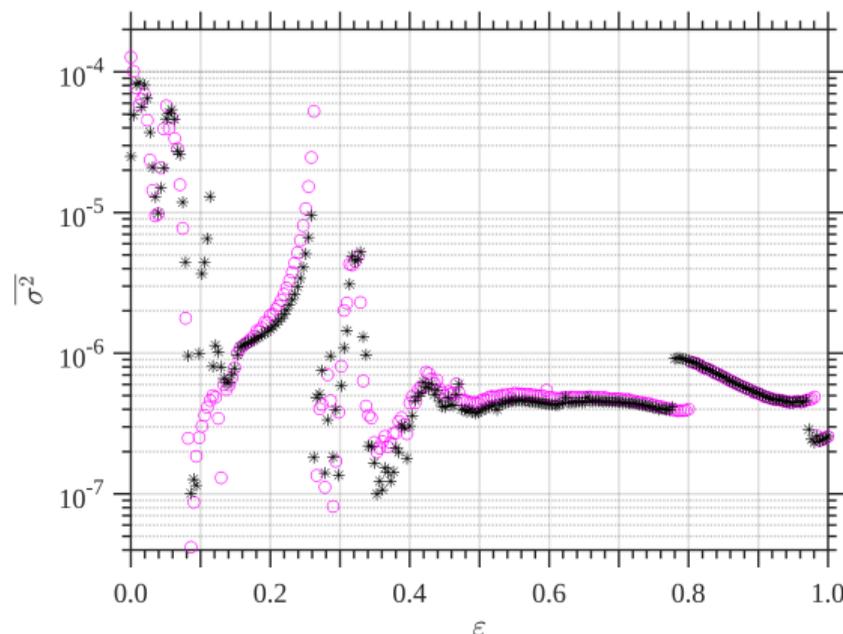
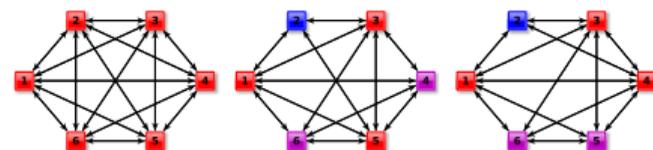


Figura 4: Histéresis en términos de $\overline{\sigma^2}$ para 6 mapas en configuración completa. ε aumenta (magenta) de 0 a 1, y posteriormente disminuye (negro) de 1 a 0.



Configuraciones

- Red completa muestra la *menor* histéresis
- Pequeño bucle de histéresis entre $0,1 \lesssim \varepsilon \lesssim 0,25$.
- Pequeño bucle de histéresis en $\varepsilon \approx 0,8$ robusto en configuraciones.

3- Acoplamiento débil ($0,05 \lesssim \varepsilon \lesssim 0,25$)

- Las 47 configuraciones restantes muestran histéresis para acoplamiento débiles
- Al aumentar ε se observan ramas en $\overline{\sigma^2}$, que permiten clasificar diferentes casos en la dinámica colectiva según las configuraciones.
- Las ramificaciones se pueden ver como 1, 2, 3 o 4 crecimientos constantes de $\overline{\sigma^2}$ y colapsos posteriores.

3.1- Acoplamiento débil ($0,05 \lesssim \varepsilon \lesssim 0,25$): 4 Ramas

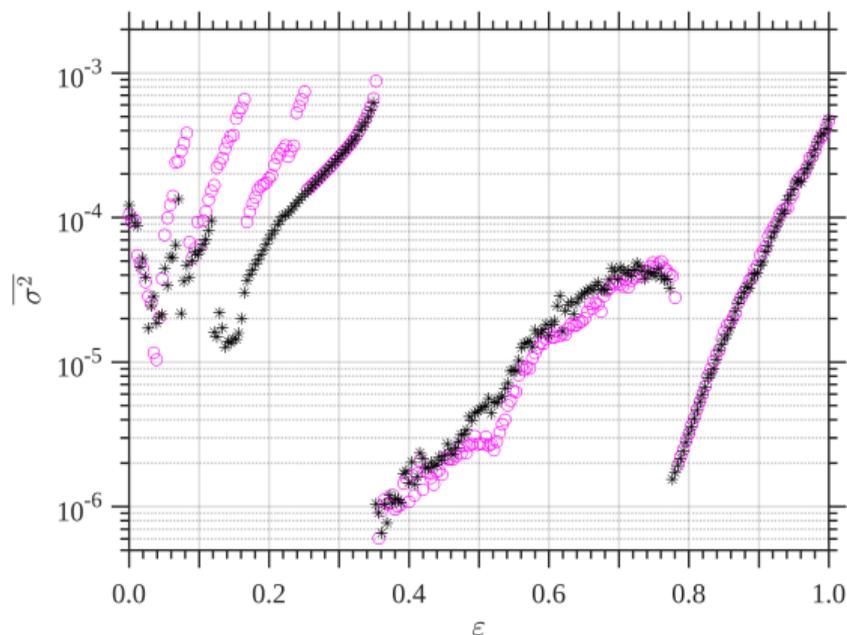
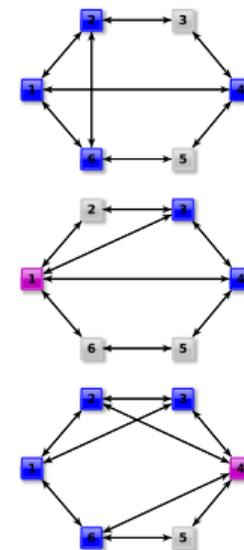
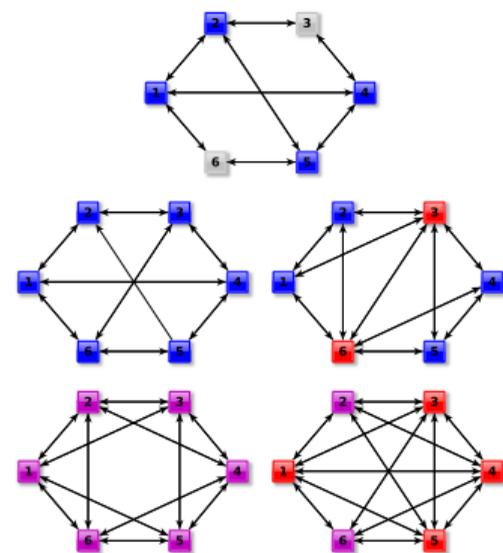
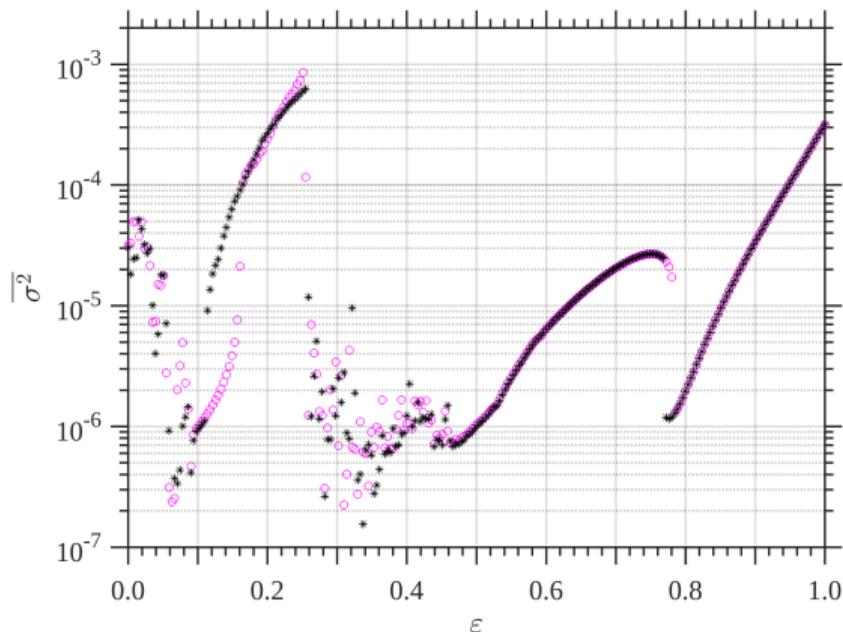


Figura 5: $\overline{\sigma^2}$ al aumentar (magenta) de 0 a 1, y posteriormente disminuir (negro) de 1 a 0 el acople ε , para diferentes configuraciones de 6 mapas.



Configuraciones

3.2- Acoplamiento débil ($0,05 \lesssim \varepsilon \lesssim 0,25$): 1 Rama



Configuraciones

Figura 6: $\overline{\sigma^2}$ al aumentar (magenta) de 0 a 1, y posteriormente disminuir (negro) de 1 a 0 el acople ε , para diferentes configuraciones de 6 mapas.

3.3- Acoplamiento débil ($0,05 \lesssim \varepsilon \lesssim 0,25$): 2 Ramas

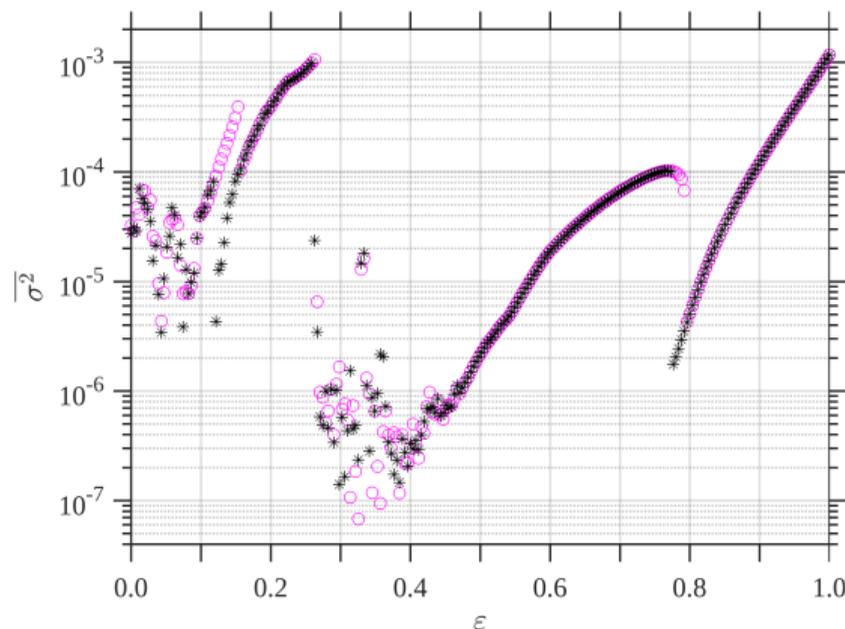
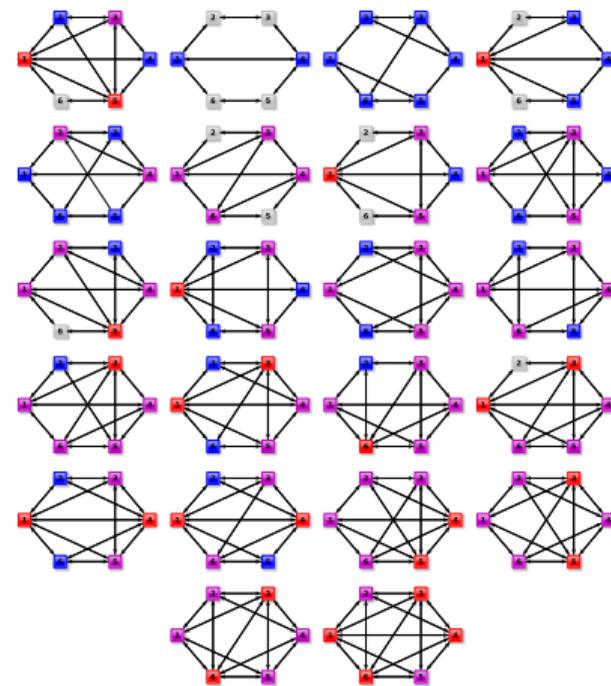
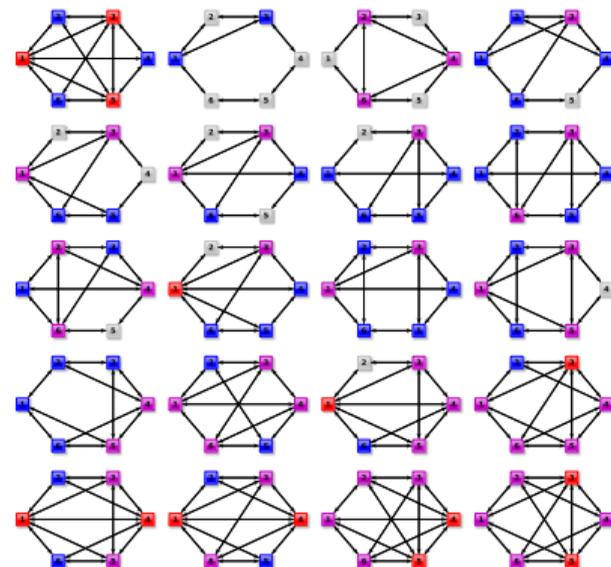
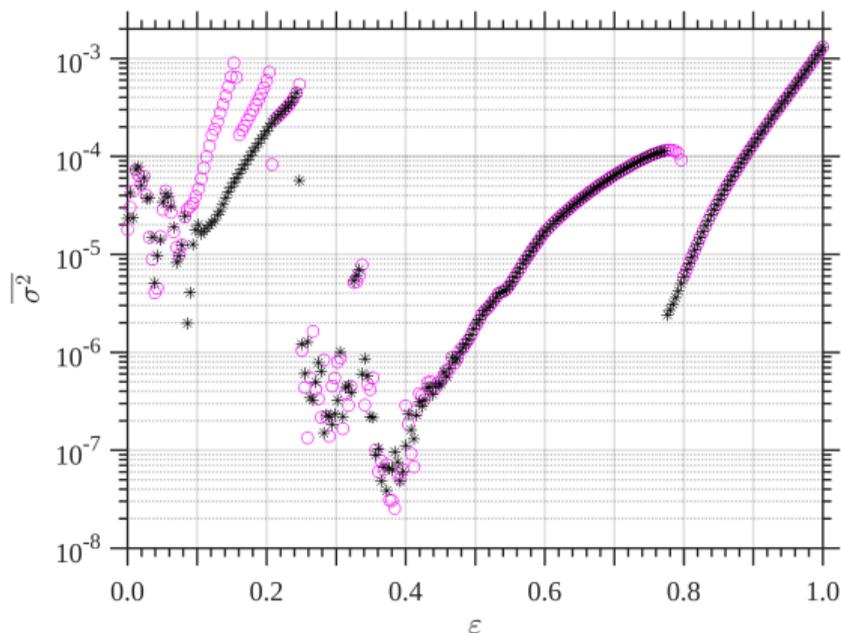


Figura 7: $\overline{\sigma^2}$ al aumentar (magenta) de 0 a 1, y posteriormente disminuir (negro) de 1 a 0 el acople ε , para diferentes configuraciones de 6 mapas.



Configuraciones

3.4- Acoplamiento débil ($0,05 \lesssim \varepsilon \lesssim 0,25$): 3 Ramas



Configuraciones

Figura 8: $\overline{\sigma^2}$ al aumentar (magenta) de 0 a 1, y posteriormente disminuir (negro) de 1 a 0 el acople ε , para diferentes configuraciones de 6 mapas.

3- Acoplamiento débil ($0,05 \lesssim \varepsilon \lesssim 0,25$)

Si bien se pudieron clasificar diferentes casos en la dinámica colectiva de las configuraciones:

- No podemos obtener una conclusión general para las ramificaciones observadas en la varianza media $\overline{\sigma^2}$ y la conectividad subyacente (o su simetría)
- Las regiones multiestables parecen ser diferentes para configuraciones diferentes, pero no están relacionadas con los grados de nodo de cada red en particular.

4-Histéresis para acoplamientos fuertes

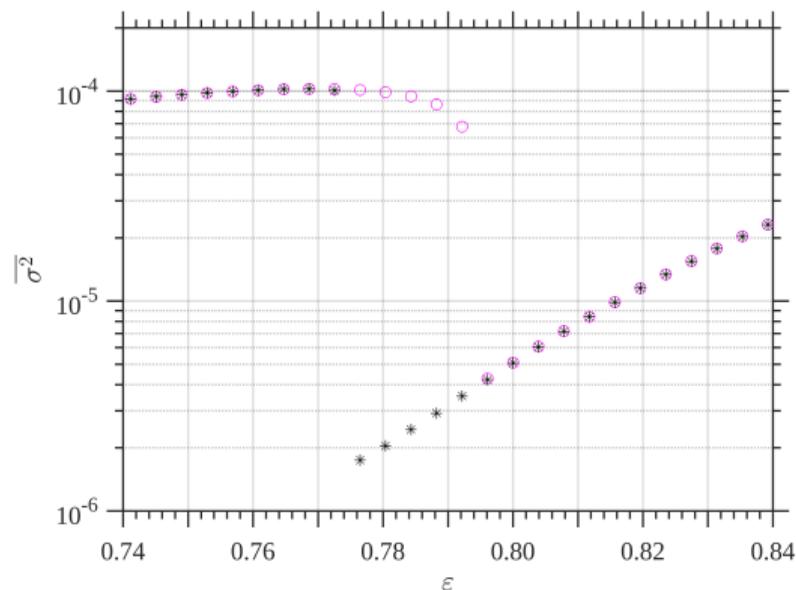


Figura 9: $\overline{\sigma^2}$ al aumentar (magenta), y posteriormente disminuir (negro) el acople en el intervalo $0,74 \leq \varepsilon \leq 0,84$, correspondiente a la Fig. 7.

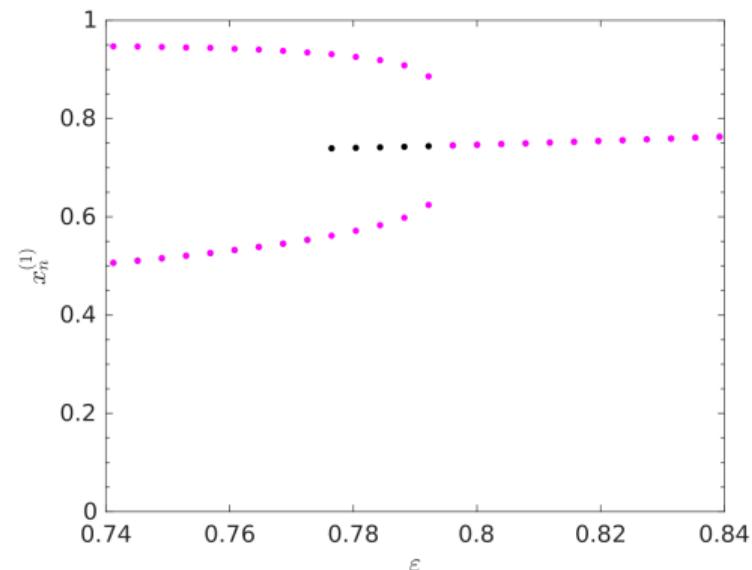


Figura 10: Diagrama de bifurcaciones de 1 mapa al aumentar (magenta), y posteriormente disminuir (negro) el acople en el intervalo $0,74 \leq \varepsilon \leq 0,84$.

Líneas finales

- 1 Las 52 configuraciones estudiadas presentan regiones multiestables que son reveladas por la histéresis en el comportamiento del parámetro de orden ($\overline{\sigma^2}$).
- 2 Se observa que este sistema acoplado tiene regiones multiestables robustas con atractores que compiten, independientemente de la configuración.
- 3 La histéresis se observa a pesar de la heterogeneidad del sistema.
- 4 Hay regiones de acoplamiento donde la dinámica colectiva *se aproxima* a la sincronización completa.
- 5 Las clasificaciones para las regiones multiestables en ML acoplados aún no se han explicado en términos de conectividad y tamaño del sistema.
- 6 Además resta estudiar en qué medida redes de conexiones esparsas permiten mayor transmisión de información entre sus partes que una red densa.

Muchas gracias.

Referencias

-  [1] Layek, G. *An Introduction to Dynamical Systems an Chaos*, volume 1. Springer, 1 edition.
-  [2] Kaneko, K. (1990). *Clustering, coding, switching, hierarchical ordering, and control in a network of chaotic elements*. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 41(2):137 – 172.
-  [3] May, R. *Simple mathematical models with very complicated dynamics*. *Nature* 261 (1976): 459-467.
-  [4] L'Her, A., Amil, P., Rubido, N., and et al. *Electronically-implemented coupled logistic maps*. *Eur. Phys. J. B*, (2016). 89:81.
-  [5] Feigenbaum, M. J. (1978). *Quantitative universality for a class of nonlinear transformations*. *Journal of Statistical Physics*, 19(1):25–52.